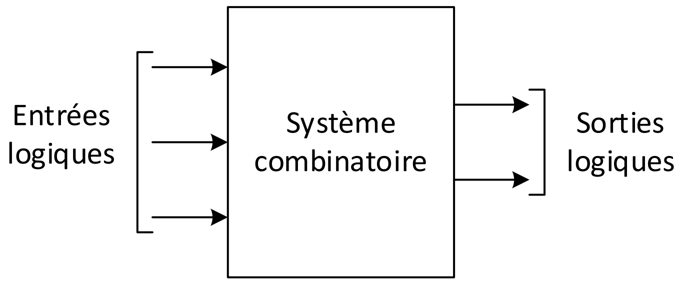
LA LOGIQUE COMBINATOIRE

1. Généralités

La résolution des problèmes de logique combinatoire induit de connaître l'algèbre de Boole. Cet algèbre permet de traduire des signaux logiques (tout ou rien) en expressions mathématiques en remplaçant chaque signal élémentaire par des **variables** logiques et leur traitement par des **fonctions** logiques.
En abordant le concept de logique combinatoire avec l'algèbre de Boole comme outil mathématique, nous étudions les principales combinaisons logiques souvent utilisées à des fins techniques. Les différentes fonctions logiques de base sont décrites sous cinq formes :

- une représentation ....
- une représentation ....
- une représentation ....
- une représentation ....
- une représentation ....

Ainsi, dans un système logique combinatoire, l'état logique des sorties dépend de la combinaison des états logiques des variables d'entrées :



On retrouve ces fonctions logiques dans la fonction .... de la chaine d'informations.

2. Variable logique

George Boole, mathématicien, logicien et un peu philosophe est le père fondateur de la logique moderne. En 1854 il réussit là où Leibniz avait échoué : allier en un même langage mathématique et symbolisme. Le but : traduire des idées et des concepts en équations, leur appliquer certaines lois et retraduire le résultat en termes logiques. Pour cela, il crée une algèbre binaire n'acceptant que deux valeurs numériques : 0 et 1. L'algèbre booléenne ou algèbre de BOOLE était née. Les travaux théoriques de Boole, trouveront des applications primordiales dans des domaines aussi divers que les systèmes informatiques, les circuits, l'automatisme...

George BOOLE
[1815-1864]

De nombreux dispositifs électroniques et électromécaniques (mécanique, électrique, pneumatique, etc...) fonctionnement en .... Ceci sous-entend qu'ils ne peuvent prendre que deux états.

Exemple :

Arrêt /	....	Vrai /	....
Ouvert /	....	Montée /	....
Allumé /	....	Actif /	....

Pour ces raisons, il est beaucoup plus avantageux d'employer un système mathématique n'utilisant que deux valeurs numériques (0 et 1) pour étudier les conditions de fonctionnement de ces dispositifs. C'est le système ....

3. Table de vérité

La table de vérité un tableau qui donne l'état de la sortie en fonction des différentes combinaisons d'états de ses variables d'entrée. Chacune des combinaisons des variables d'entrée est écrite sur une ligne différente.
Si *n* définit le nombre de variables d'entrée, la table de vérité comportera 2^n combinaisons différentes.

Exemple :

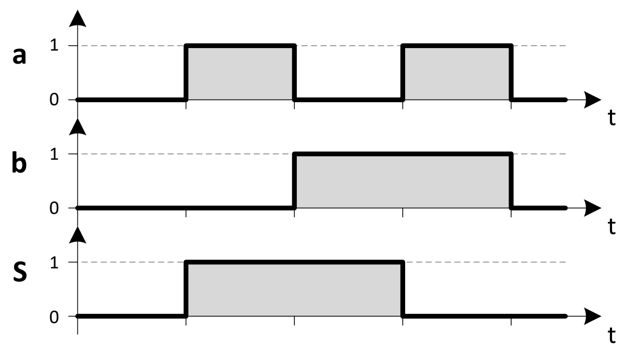
Entrées		Sortie
a	**b**	**S**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- a et b sont les variables d'entrée
- S est la variable de sortie
- Ici n = ... La table de vérité comporte ....
  ....

4. Chronogrammes

Un chronogramme est une représentation graphique qui permet de représenter, en fonction du temps, l'état logique des variables :

Exemple :

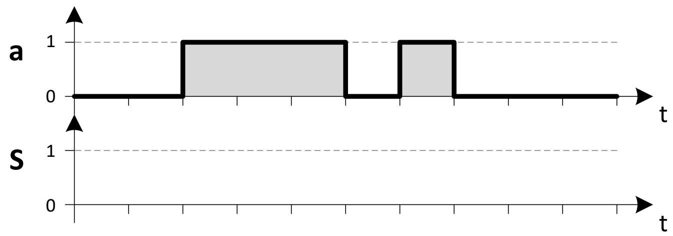


5. Opérateurs logiques élémentaires

5.1. Opérateur OUI (égalité)

Schéma à contacts	Table de vérité	Equation	Symbole	
			AFNOR	US
S	a | S 0 1	S = ...	a – 1 – S	a – S

Chronogrammes :

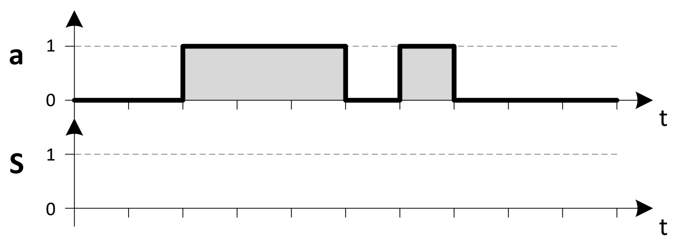


.... Cet opérateur n'est pas utilisé pour sa fonction logique qui ne modifie en rien le fonctionnement.

5.2. Opérateur NON (complément)

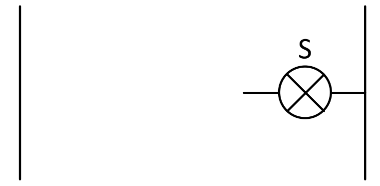
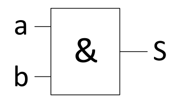
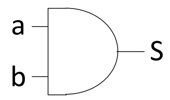
Schéma à contacts	Table de vérité	Equation	Symbole	
			AFNOR	US
S	a | S 0 1	S = ...	a – 1 – S	a – S

Chronogrammes :

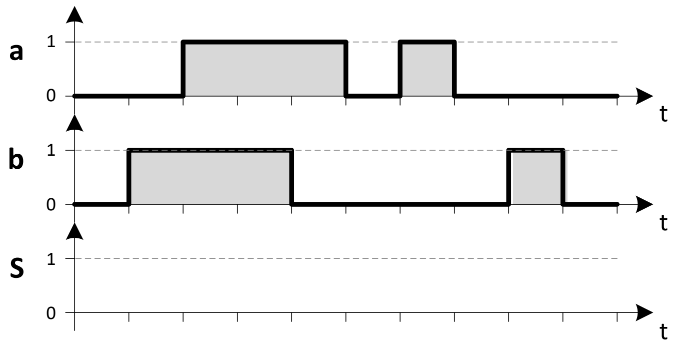


....

5.3. Opérateur ET / AND (produit logique)

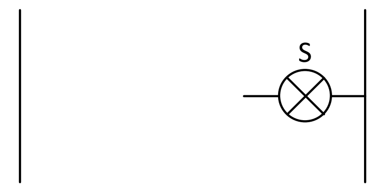
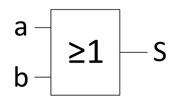
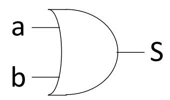
Schéma à contacts	Table de vérité	Equation	Symbole	
			AFNOR	US
	a b S 0 0 0 1 1 0 1 1	S = ...		

Chronogramme :

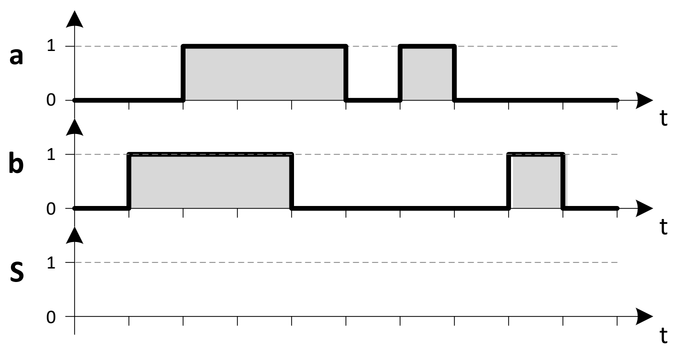


....

5.4. Opérateur OU / OR (somme logique)

Schéma à contacts	Table de vérité	Equation	Symbole	
			AFNOR	US
	a b S 0 0 0 1 1 0 1 1	S = ...		

Chronogramme :



....

6. Propriétés logiques de l'algèbre de Boole

6.1. Associativité

Comme avec les opérations habituelles, certaines parenthèses sont inutiles :

- Pour le ET : $(a.b).c =$ ....
- Pour le OU: $(a+b)+c =$ ....

6.2. Commutativité

L'ordre des variables est sans importance :

- Pour le ET : $a.b =$ ....
- Pour le OU : $a+b =$ ....

6.3. Distributivité

- Pour le ET : $a.(b+c) =$ ....
- Pour le OU : $a+(b.c) =$ ....

6.4. Relations particulières

- Pour le ET : $a.0 =$ .... $a.1 =$ .... $a.a =$ ..... $a.\bar{a} =$ ....
- Pour le OU : $a+0 =$ .... $a+1 =$ .... $a+a =$ .... $a+\bar{a} =$ ....
- Double complémentation : $\bar{\bar{a}} =$ ....

6.5. Relations fondamentales

- Absorption : $a+a.b =$ ....

  $a.(a+b) =$ ....
- Simplification : $a+\bar{a}.b =$ ....

  $a.(\bar{a}+b) =$ ....

6.6. Théorème de De Morgan

- Le complément d'un produit logique est égal à la somme du complément de chaque terme :

  $\overline{a.b} =$ ....
- Le complément d'une somme logique est égal au produit du complément de chaque terme :

  $\overline{a+b} =$ ....

6.7. Règle de priorité des opérateurs

Par convention d'écriture, certains opérateurs ont une priorité supérieure aux autres, ils doivent être exécutés en respectant l'ordre de priorité suivant :

1. Le complément et les parenthèses ont la plus forte priorité.
2. Le ET possède le niveau de priorité inférieur suivant.
3. L'opérateur OU a la plus faible priorité dans une expression.
4. Lorsque des niveaux de parenthèse (ou de compléments) sont imbriqués, ce sont les niveaux les plus internes qui ont la priorité la plus forte.

Exemple :

$$S = \left(\overline{(a+b).m}.n+u\right).w$$

Ce niveau de parenthèse étant le plus interne, le OU est réalisé en premier.

Le ET sous le complément est réalisé ensuite, le résultat est complémenté.

L'opérateur ET, prioritaire sur le OU est réalisé ensuite.

L'opérateur OU est le dernier à être effectué au sein du niveau de parenthèses.

La dernière opération est le ET avec w.

A titre d'exercice, représenter la succession d'opérations pour l'équation suivante :

$$S = \overline{\overline{a+b}.c} + d.\bar{e}$$