

LA NUMERATION

1. Historique

Le problème de la numération est celui de la désignation des nombres. Voici, ci-dessous, l'écriture du chiffre 1971 dans différents systèmes de notation des nombres dans l'ordre chronologique de leurs apparitions.

babylonien	
égyptien	
grec archaïque	
grec	
romain	MCMLXXI
chinois (date)	一九七一
japonais	一千九百七十一
indo-arabe	1971

• Entre 3500 et 2500 avant Jésus Christ :

Dans le système babylonien (Sumérien), de droite à gauche sur la figure, le premier clou représente une unité du premier ordre, les cinq crochets valent chacun 10, les deux clous suivants indiquent deux fois l'unité d'ordre supérieur (60), et les trois derniers crochets valent 10 x 60.

C'est une numération de position en base 60 : *Le système sexagésimal*.

C'est aux Sumériens que l'on doit, entre autres, la division de l'heure en soixante minutes, de la minute en soixante secondes.

• Antiquité :

Les Egyptiens et les Romains utilisaient une numération additive ou numération de juxtaposition. Chaque symbole représente une certaine quantité que l'on additionne.

Le système égyptien est strictement additif ; dans l'exemple choisi, on voit, à droite, le symbole de 1 000, suivi par neuf symboles de 100, sept de 10 et une unité.

Le système romain est additif mais aussi soustractif.

Exemple : VI (6) = V (5) + I (1) et IV (4) = V (5) – I (1)

•Vers 0 - 300 après Jésus Christ :

C'est en Inde que l'on trouve les premières traces des symboles 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 actuellement utilisés.

•Vers 600 - 700 après Jésus Christ :

On trouve sur le sol indien des preuves de l'existence du système décimal positionnel. C'est une numérotation de position en base 10 : *le système décimal*.

Le monde chrétien devait la connaissance du système indien aux Arabes. Depuis le Xe siècle, le système indo-arabe s'est répandu en Europe.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
• ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

2. La base

La nécessité de quantifier, notamment les échanges commerciaux, s'est faite dès la structuration de la vie sociale. Les tentatives de représentation symbolique de quantités furent nombreuses (bâtons, chiffres romains, ...) avant que ne s'impose la numération arabe, universellement adoptée étant donné sa bonne capacité à traiter les calculs courants.

L'emploi quotidien de ce système, nous fait oublier la structure et les règles qui régissent l'écriture des nombres, notamment la notion de base.

De nombreux systèmes de numérations sont utilisés en technologie numérique. Les deux plus courants sont les systèmes binaire et hexadécimal. Il existe aussi les systèmes décimal, octal et BCD.

Dans tous les cas, qu'elle que soit le système de numération utilisé, il faudra que les valeurs soient converties en valeurs binaires pour être introduites dans le circuit numérique.

Exemple : Lorsque vous composez un nombre (décimal) sur votre calculatrice ou clavier d'ordinateur, les circuits convertissent ce nombre en valeurs binaires pour être exploité.

La base d'un système de numération est

- Le système décimal est donc un système en base 10. Il utilise les dix caractères suivants :

- Le système binaire est donc un système en base 2. Il utilise les deux caractères suivants :

- Le système hexadécimal est donc un système en base 16. Il utilise les seize caractères suivants :

Lorsque l'on est amené à manipuler des nombres dans des bases différentes, il convient de préciser cette base pour éviter les confusions.

Exemples:

- Le nombre décimal 7264 doit être représenté de la manière suivante :

- Le nombre binaire 1011 doit être représenté de la manière suivante :

3. Écriture d'un entier

Si b est la base du système, tout entier s'écrit de la façon suivante :

Exemples:

$7264_{(10)} =$

$1011_{(2)} =$

4. Les systèmes de numération.

4.1. Le système décimal

Le système décimal est le système universellement utilisé. C'est la base de référence, ce qui signifie qu'un nombre est de manière implicite en décimal dès lors qu'il est écrit sans précision de sa base.

Exemple :

$2013_{(10)} =$

4.2. Le système binaire

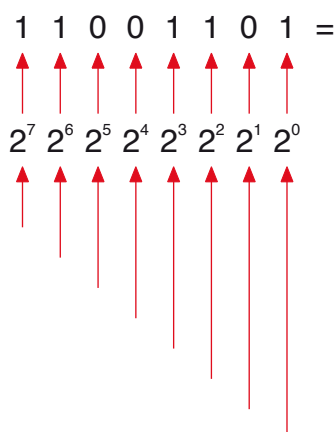
Le système binaire est le système de numération couramment utilisé en électronique. C'est un système en base deux (caractères utilisés : 0 et 1). Chacun de ces chiffres qui compose un nombre binaire est appelé Bit (Binary Unit ou Binary Digit).

Exemple :

$11011001_{(2)} =$

En binaire on compte donc de la manière suivante :

Base 10	Base 2
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	



Remarque :

Les nombres binaires les plus souvent manipulés en électronique et en informatique sont composés soit :

- De 1 bit : Représentation de l'état actif ou inactif d'une variable.
- De 4 bits : Quartet.
- De 8 bits : Octet (Byte en anglais).
- De 16 bits : Word (Intel) ou Double Byte (Motorola)
- De 32 bits ou 64 bits.

4.3. Le système hexadécimal

Le système hexadécimal est le système le plus utilisé en électronique numérique. Il permet en effet une manipulation de nombres en représentation compacte (quartet). C'est un avantage non négligeable dans les systèmes actuels qui ont de grande capacité mémoire par exemple.

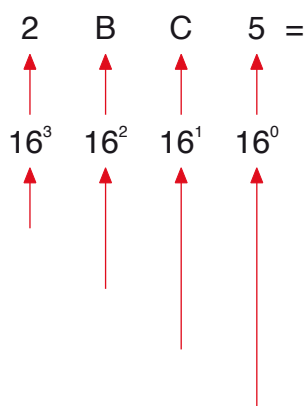
La base 16 est une forme contractée de la base 2.

Exemple :

$2BC5_{(16)} =$

En hexadécimal on compte de la manière suivante :

Base 10	Base 16
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

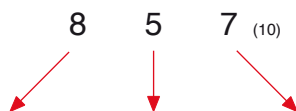


4.4. Le système BCD (Binary Coded Decimal - Décimal Codé Binaire)

Ce code conserve les avantages du système binaire naturel et du système décimal. Chaque chiffre du code décimal est représenté par un quartet binaire, mais on compte en base 10, ce qui veut dire que la valeur la plus élevée dans un quartet est $9_{(10)} = 1001_{(2)}$.

Exemple :

Le chiffre 857 est donc représenté par :



Donc $857_{(10)} =$

Attention :

$10_{(10)} =$

$857_{(10)} \neq$

5. Conversions

5.1. Conversion binaire et hexadécimal en décimal

La conversion d'un nombre dans un système de numération vers le système décimal est toujours la même. Pour retrouver le nombre décimal, il suffit d'additionner les monômes représentés chacun par le chiffre appartenant au système de numération multiplié par la puissance de la base correspondant au rang de ce chiffre.

• **Conversion binaire en décimal :**

$1101_{(2)} =$

$100101_{(2)} =$

• **Conversion hexadécimal en décimal :**

$3D_{(16)} =$

$3AF6_{(16)} =$

5.2. Conversion décimal en binaire

La méthode consiste à effectuer une succession de divisions par 2 jusqu'à ce que l'on obtienne un résultat de 1 ou 0.

Le nombre binaire est obtenu en lisant la succession de reste dans l'ordre inverse des divisions.

Exemple :

857

857

Donc $857_{(10)} =$

Remarque :

On essaie toujours de regrouper les bits par quartet (en partant de la droite).

5.3. Conversion hexadécimal en binaire

Il suffit de remplacer chaque symbole hexadécimal du nombre par son équivalent binaire (quartet).

Exemple :

C 4 ₍₁₆₎

Donc $C4_{(16)} =$

5.4. Conversion binaire en hexadécimal

Il suffit de regrouper les bits du nombre binaire par quartet (en partant de la droite) et de trouver l'équivalent hexadécimal de chaque quartet.

Exemple :

1001 1110 ₍₂₎

Donc $10011110_{(2)} =$

5.5. Conversion décimal en hexadécimal

- **Première méthode :**

Cette méthode consiste à effectuer une succession de divisions par 16 jusqu'à ce que l'on obtienne un résultat inférieur à la base.

Exemple :

941

Donc $941_{(10)} =$

- **Deuxième méthode :**

Cette méthode, plus couramment utilisée du fait que les nombres soient déjà écrits en binaire dans les systèmes numériques, consiste à effectuer une conversion en base 2 du nombre, puis à convertir chaque quartet obtenu en hexadécimal.

Exemple :

$941_{(10)} =$

Donc $941_{(10)} =$

6. Rappel

Décimal (base 10)	Binaire naturel (base 2)	Hexadécimal (base 16)	BCD (décimal codé binaire)
0	0000	00	0000 0000
1	0001	01	0000 0001
2	0010	02	0000 0010
3	0011	03	0000 0011
4	0100	04	0000 0100
5	0101	05	0000 0101
6	0110	06	0000 0110
7	0111	07	0000 0111
8	1000	08	0000 1000
9	1001	09	0000 1001
10	1010	0A	0001 0000
11	1011	0B	0001 0001
12	1100	0C	0001 0010
13	1101	0D	0001 0011
14	1110	0E	0001 0100
15	1111	0F	0001 0101