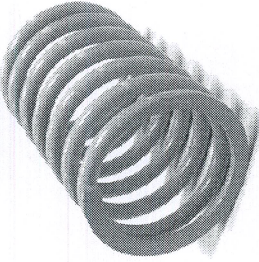
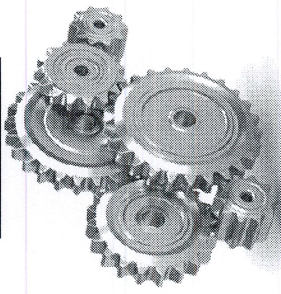
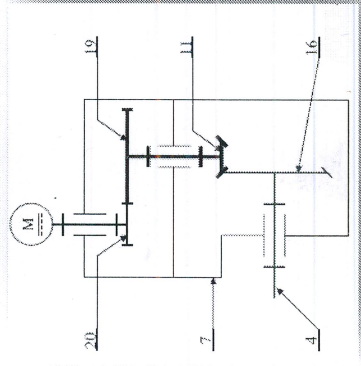
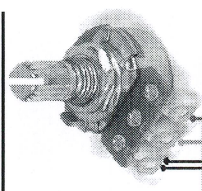


Modélisation d'un système asservi

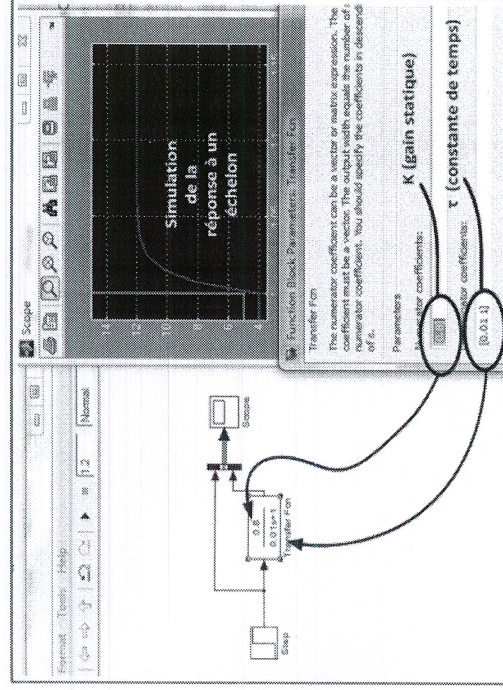


TD

1. Relation de proportionnalité

<p>Ressort</p>  <p>Diagram showing a spring with input 'Allongement' (displacement) and output 'force'.</p>	<p>Un ressort de compression développe un effort de 15N lorsque sa longueur est réduite de 3cm.</p> <p>a) sachant que $F = k \cdot \Delta l$, calculer la raideur du ressort. Quel est le gain de ce système ?</p> <p>b) Quelle est la force développée par le ressort pour un écrasement de 10cm ?</p>	<p>a) Raideur $k = \frac{F}{\Delta L}$ $k = \frac{15}{0,03}$ $k = 500 \text{ N/m}$</p> <p>Gain: $k = 500$</p> <p>b) $F = k \cdot \Delta L$ $= 500 \times 0,1$ $= 50 \text{ N}$</p>
<p>Engrenages</p>  <p>Diagram showing a gear train with input 'Vitesse d'entrée' and output 'Vitesse de sortie'.</p> 	<p>Un système est composé du réducteur à engrenages modélisé ci-contre.</p> <p>a) Quel est le gain du système.</p> <p>b) Lorsque la vitesse d'entrée est de 120tr/min, déterminer la vitesse de sortie en tr/min et en rad/s.</p> <p>Avec :</p> <p>$Z_{20} = 12$ dents $Z_{19} = 34$ dents $Z_{11} = 10$ dents $Z_{16} = 42$ dents</p>	<p>a) Rapport de réduction $R = \frac{Z_{entrée}}{Z_{sortie}} \times \dots$ $R = \frac{Z_{20}}{Z_{19}} \times \frac{Z_{11}}{Z_{16}}$ $R = \frac{12}{34} \times \frac{10}{42} \approx 0,084$</p> <p>Gain: $K = 0,084$</p> <p>b) $R = \frac{N_{sortie}}{N_{entre}}$</p> <p>donc $N_{sortie} = R \times N_{entre}$ $= 0,084 \times 120$ $= 10,08 \text{ tr/min}$</p> <p>$\omega_{sortie} = \frac{2\pi \cdot N_{sortie}}{60}$ $= 1,056 \text{ rad/s}$</p>
<p>Potentiomètre</p>  <p>Diagram showing a potentiometer with input 'Entrée' and 'Masse', and output 'Sortie' and 'Masse tension'.</p> <p>Diagram showing a potentiometer with input 'angle' and output 'tension'.</p>	<p>Un potentiomètre délivre une tension comprise entre 0 et 5V pour un angle compris entre 0 et 90°.</p> <p>a) Calculer le gain du système.</p> <p>b) Quelle sera la tension aux bornes du potentiomètre si on fait tourner l'axe de 12° ?</p>	<p>a) $K = \frac{\text{Sortie}}{\text{Entrée}}$</p> <p>$K = \frac{5}{90} = \frac{1}{18} \approx 0,055 \text{ V/°}$</p> <p>b) $U_s = K \cdot \theta_{entre}$ $= \frac{1}{18} \times 12$ $= 0,67 \text{ V}$</p>

2. Système du 1^{er} ordre, paramètres

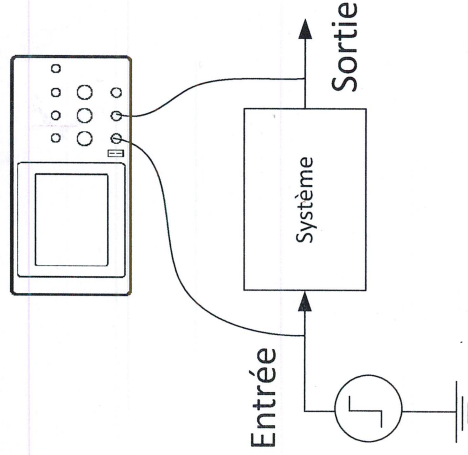


On souhaite paramétrer un système du 1^{er} ordre sous Matlab. Pour cela on a besoin de connaître le gain statique et la constante de temps du système.

Le système sera caractérisé par sa fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

Pour déterminer expérimentalement ces paramètres, on observe l'évolution de l'entrée (échelon) et de la sortie du système sur un oscilloscope.



« τ » Correspond au temps que met la sortie à atteindre 63% de sa variation ΔS . (C'est-à-dire de la différence entre la valeur prise par la sortie après et avant l'échelon)

a) Déterminer K et τ

$$K = \frac{\Delta_{Sortie}}{\Delta_{Entree}} = \frac{12-4}{15-5} = 0,8$$

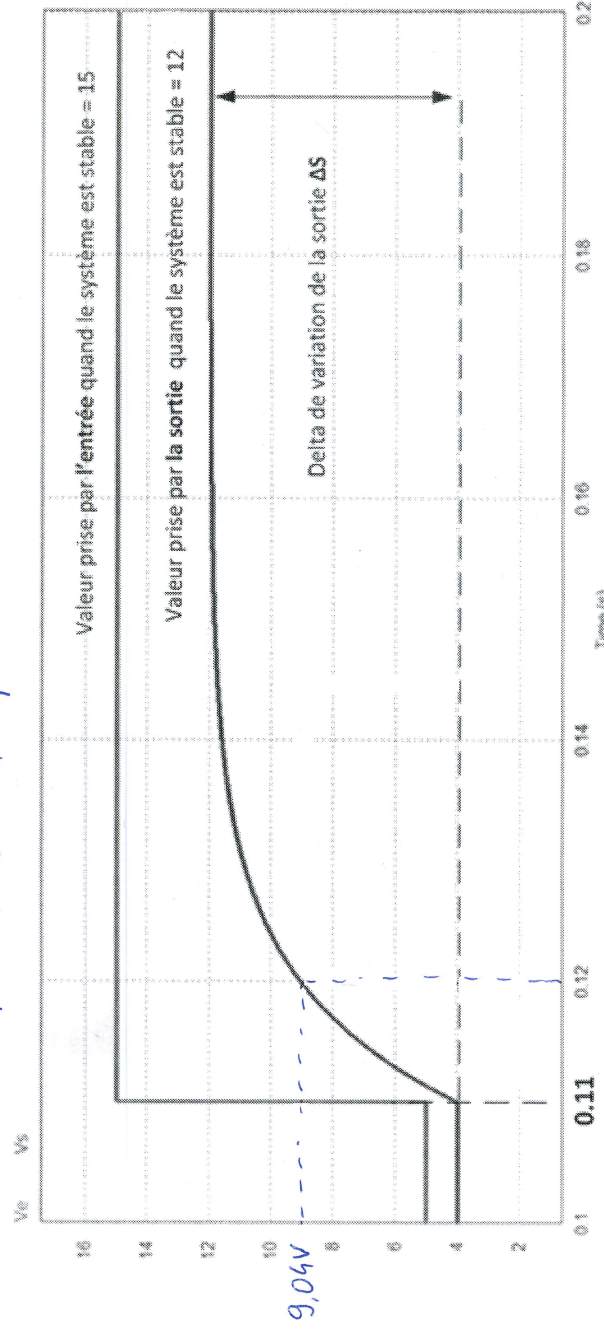
$$\mu_{63\%} = \mu_0 + \frac{63}{100} \times \Delta S$$

$$= 4 + \frac{63}{100} \times (12-4) = 9,04V$$

Par lecture: $\tau = 0,01s$

b) Ecrire la fonction de transfert de ce système

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} = \frac{0,8}{1 + 0,01 \cdot p}$$

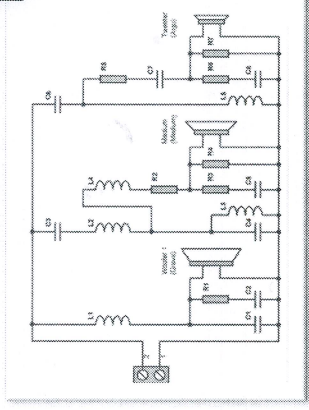
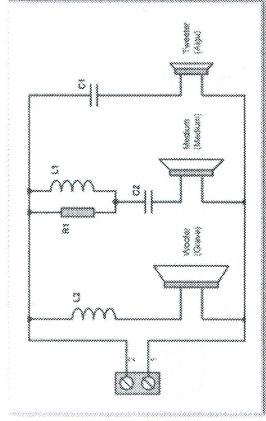
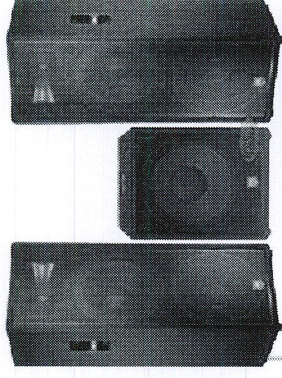


3. Système du 1^{er} ordre : le circuit RC

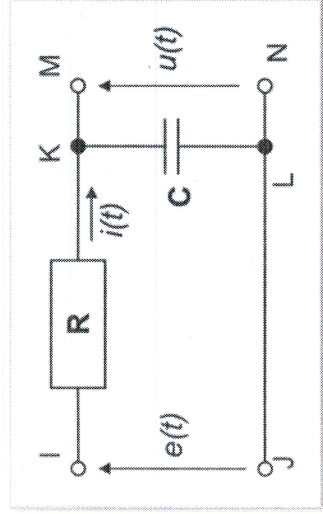
Un circuit RC est un circuit électrique, composé d'une résistance et d'un condensateur montés en série ou en parallèle. Dans leur configuration série, les circuits RC permettent de réaliser des filtres électroniques passe-bas ou passe-haut.

Ainsi, lorsque la sortie du filtre est prise sur le condensateur le comportement est du type filtre passe-bas : les hautes fréquences sont atténuées et les basses fréquences passent. Si la sortie est prise sur la résistance, l'inverse se produit et le circuit se comporte comme un filtre passe-haut.

Dans le domaine du son, ces filtres sont utilisés pour diriger le signal sonore vers le bon haut-parleur. Les filtres peuvent être simples ou plus complexes en fonction de la qualité voulue.



Montage:



On considère le condensateur de capacité C (en Farad) déchargé à l'instant $t=0$ et on note $e(t)$ et $u(t)$, les tensions respectives d'entrée et de sortie.

Mise en équation :

On utilise les lois de Kirchhoff

Maille IMNJ: $e(t) = R \cdot i(t) + u(t)$

Maille KLMN: $i(t) = C \cdot \frac{d[u(t)]}{dt}$

a) Exprimer $e(t)$ en fonction de $u(t)$ et de $\frac{d[u(t)]}{dt}$

$$e(t) = R \cdot C \cdot \frac{du(t)}{dt} + u(t)$$

b) Ecrivez l'équation différentielle d'un système du 1^{er} ordre.

$$\tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

c) Déterminer la valeur des coefficients K et τ par identification

par identification

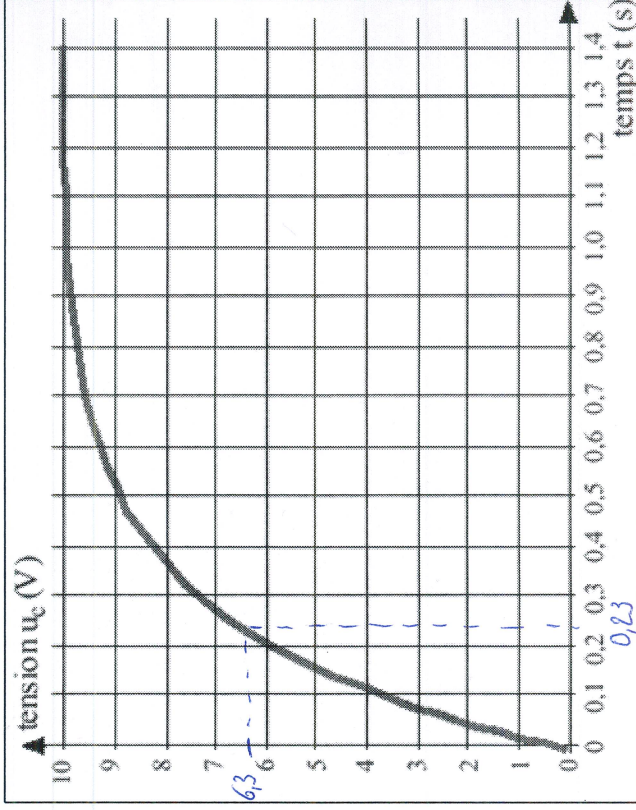
$$K = 1$$

$$\tau = R \cdot C$$

d) On a relevé la réponse de $U_c(t)$ à la sollicitation d'un échelon de 10V : Déterminer la constante de temps, et vérifier la valeur du gain statique

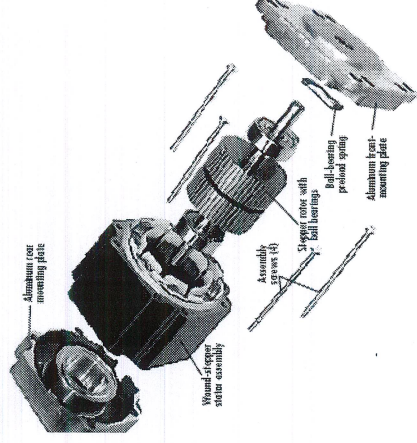
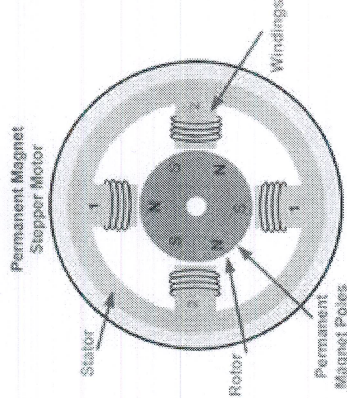
$$K = \frac{10}{10} = 1$$

$$\tau = 0,235$$

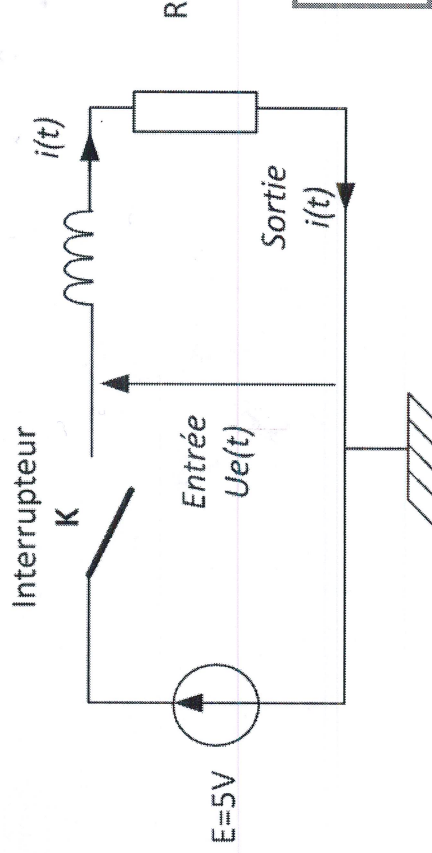


4. Système du 1^{er} ordre : le circuit RL

Les circuits RL (résistance + inductance (ou bobine)) sont couramment rencontrés dans les circuits électriques (filtres par exemple) ou dans les moteurs pas à pas (R correspond alors à la résistance du fil de cuivre au passage du courant).



Montage



A $t = 0$, on ferme l'interrupteur K

$$E = 5V$$
$$i(t=0) = 0A$$

Rappel :

$$U_l = L \frac{di}{dt}$$

Q1 : Exprimer l'entrée de notre système ($U_e(t)$) en fonction de la sortie ($i(t)$), et la mettre sous la forme canonique $K.e(t) = s(t) + \tau \frac{ds(t)}{dt}$

$$V_{\text{eff}}(r) = V_L + V_{\text{attraction}}$$

done $\frac{1}{R} \cdot U_e(t) = i(t) + \frac{L}{R} \cdot \frac{di(t)}{dt}$

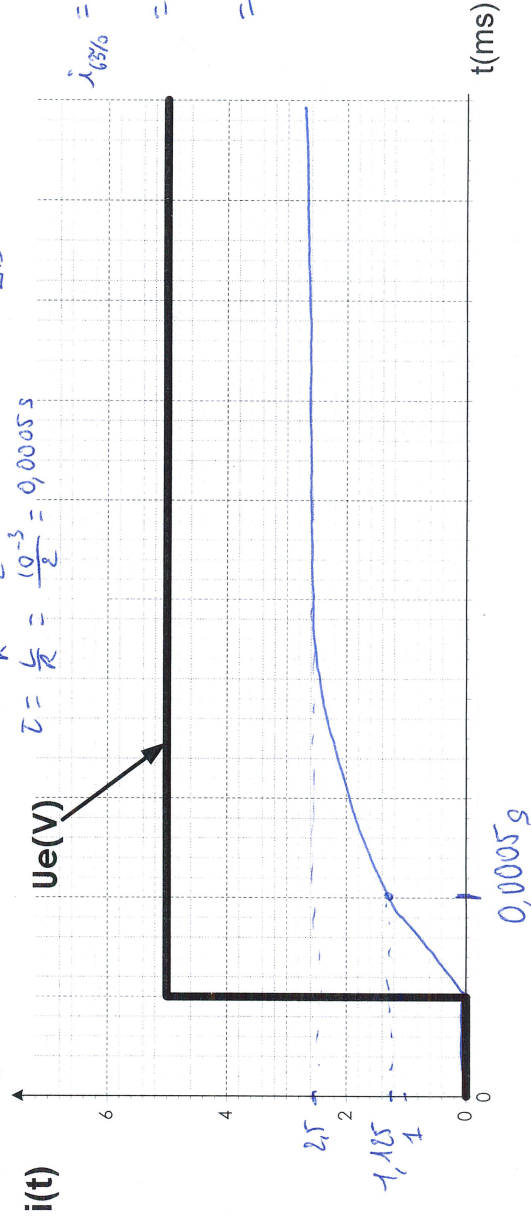
Q2 : Déterminer l'expression de la constante de temps τ et le gain statique K

done $k = \frac{1}{R}$

$$I = L/R$$

Q6 : Reporter ci-dessous l'allure de $i(t)$, si $R=2\Omega$, $L=1\text{mH}$ (l'inductance d'une bobine s'exprime en Henry « H »)

$$K = \frac{1}{R} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ o} \\ Z = \frac{1}{R} = \frac{1}{0,3} = 0,00055$$

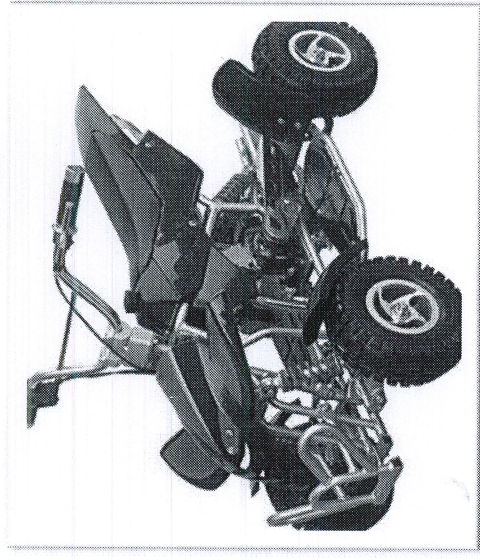


$$\begin{aligned} i_{(5\%)} &= i_0 + \frac{63}{100} \times \Delta S \\ &= 0 + \frac{63}{100} \times 25 \\ &= 15.75\% \end{aligned}$$

5. Système du 2^{ème} ordre : amortisseur de mini-quad

Amortisseur de mini-quad

On s'intéresse au mouvement d'une roue par rapport au châssis par l'intermédiaire d'un amortisseur et d'un ressort. Ce système peut être modélisé par une masse reliée en série à un ressort et un amortisseur montés en parallèle.



On note $F(t)$ la force exercée sur la masse M et $x(t)$ la position de cette masse par rapport à l'équilibre, au cours du temps.

a) Identifier l'entrée et la sortie du système

entrée : $F(t)$

sortie : $x(t)$

b) Faire le bilan des actions mécaniques s'exerçant sur la masse M

- l'action $-F(t)$

- l'action du ressort proportionnelle à l'écarteur $+k \cdot x(t)$

- l'action de l'amortisseur proportionnelle à la vitesse $+f \cdot dx(t)/dt$

c) Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse M

$$\sum \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}$$

En projection sur \vec{x} : $-F(t) + k \cdot x(t) + f \cdot \frac{dx(t)}{dt} = m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$

d) Ecrire l'équation différentielle régissant un 2ème ordre

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2 \cdot z \cdot \omega_0 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot x(t) = K \cdot \omega_0^2 \cdot F(t)$$

e) Par identification des coefficients, déterminer la pulsation propre puis le gain, puis le coefficient d'amortissement

$$-\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{f}{m} \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m} \cdot x(t) = + \frac{1}{m} \cdot F(t)$$

pulsation propre : ω_0

$$\omega_0^2 = + \frac{k}{m} \quad \text{donc} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

gain : K

$$K \cdot \omega_0^2 = \frac{1}{m} \quad \text{donc} \quad K = \frac{1}{m} \times \frac{m}{k} = \frac{1}{k} \leftarrow \text{raideur du ressort}$$

Coefficient d'amortissement : z

$$2 \cdot z \cdot \omega_0 = \frac{f}{m} \quad \text{donc} \quad z = \frac{f}{2m \cdot \omega_0} = \frac{f}{2m \sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{f}{2\sqrt{k \cdot m}}$$

car $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ et $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ donc $\frac{f}{2 \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt{k}} = \frac{f}{2 \cdot \sqrt{k \cdot m}}$

