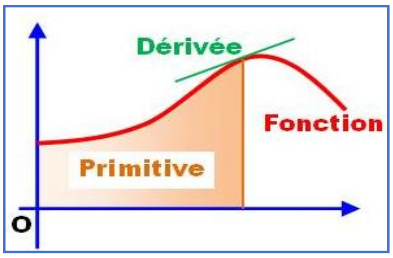
Fiche outils mathématiques : dérivées et primitives

Calcul différentiel, calcul intégral

Calcul différentiel :

Il consiste à calculer le taux de variation d'une grandeur.
Le taux de variation d'une fonction c'est la dérivée de la fonction.



Calcul intégral

Il consiste à calculer la valeur d'une grandeur en connaissant son taux de variation.
Il consiste à calculer une fonction connaissant sa dérivée : calcul de primitive

De manière intuitive ;

- *La dérivée cherche une enveloppe*
- *La primitive cherche une surface (calcul d'aire sous la courbe)*

Dérivées

Taux d'accroissement ou taux de variation

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I et soit a∈ I.
Le fonction f admet un nombre dérivé en a, noté f'(a), si la limite du taux d'accroissement existe et est finie :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Dérivées usuelles :

Fonction	Dérivée	Intervalle de dérivabilité
$\boldsymbol{f(x) = k}$ avec $\boldsymbol{k}$ constante	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{f(x) = x}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{f(x) = ax + b}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{f(x) = x^n \quad avec\, n} \in \mathbb{N}^*$ $\boldsymbol{f(u) = u^n}$	$f'(x) = nx^{n-1}$ $f'(u) = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}}$	$f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right) x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;\ +\infty[$
$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}}$ **avec** $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = -n \times x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\boldsymbol{f(x) = \cos(x)}$ $\boldsymbol{f(u) = \cos(u)}$	$f'(x) = -\sin(x)$ $f'(u) = -u' \cdot \sin(u)$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{f(x) = \sin(x)}$ $\boldsymbol{f(u) = \sin(u)}$	$f'(x) = +cos(x)$ $f'(u) = +u' \cdot \cos(u)$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{f(x) = \tan(x)}$	$f'(x) = \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$	$]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$
$\boldsymbol{f(u) = e^u}$	$f'(u) = u' \cdot e^u$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{f(x) = \ln(x)}$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$]0;\ +\infty[$

Règles de dérivation :

Somme	$\boldsymbol{(u+v)'}$	$\boldsymbol{u' + v'}$
Produit	$(u \cdot v)'$	$u' \cdot v + u \cdot v'$
Quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' =$	$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Dérivées et cinématique

La vitesse instantanée s'obtient en dérivant, par rapport au temps, le vecteur position :

L'accélération s'obtient en dérivant, par rapport au temps, la vitesse

$$\overrightarrow{\Gamma}_{(M/R_0)} = \left(\frac{d\overrightarrow{V}_{(M/R_0)}}{dt}\right)_{R_0}$$

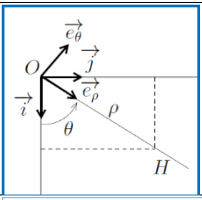
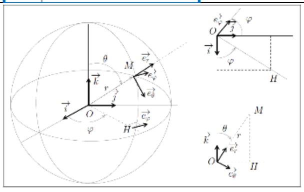
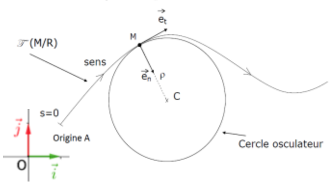
$$\overrightarrow{V}_{(M/R_0)} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R_0}$$

O origine de R_0

Dérivée des vecteurs unitaires des bases mobiles

Les bases $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$, $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ et$(\overrightarrow{e_t}, \overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_b})$dépendent du temps elles sont appelées **bases mobiles**.

Lorsque l'on dérive un vecteur (position ou vitesse) par rapport au temps, s'il est exprimé dans une base mobile, il faut penser à dériver ses vecteurs unitaires.

Base cylindrique	 $\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\theta} = \overrightarrow{e_\theta}$; $\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta} = -\overrightarrow{e_\rho}$; $\left(\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right)_{R_0} = \frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$; $\left(\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}\right)_{R_0} = \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_\rho}$
Base sphérique	 $\left(\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right)_{R_0} = \frac{\partial\overrightarrow{e_r}}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\overrightarrow{e_r}}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}$
Repère de Frenet	 $\frac{d\overrightarrow{e_t}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_t}}{ds} \times \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho} \cdot \overrightarrow{e_n}$; $\boxed{v = \dot{s} = \frac{ds}{dt}}$

Primitives

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$,   où F est une primitive de f sur [a,b]

Equations différentielles du temps

Calcul intégral et différentiel

3 Les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{ax}$ où C est une constante réelle. Cela permet de :

✓ résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre avec second membre $y' = ay + b$ en ajoutant la constante $x \mapsto -\frac{b}{a}$ aux solutions de l'équation homogène associée ;

✓ résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre avec second membre $y' = ay + f$ en ajoutant une solution particulière φ aux solutions de l'équation homogène associée.

Equations différentielles en mécanique du point

Une équation différentielle est une équation où l'inconnue est une fonction, et qui se présente sous la forme d'une relation entre cette fonction et ses dérivées.

La solution d'une équation différentielle est une fonction (et non pas un nombre)

On trouvera souvent des solutions à une constante près. Seule une information complémentaire (dite condition initiale) permettra de préciser sa valeur (passage de la courbe par un point connu, par exemple).

En mécanique du point nous résoudrons des équations différentielles faisant intervenir la position, la vitesse et l'accélération :

Types d'équations différentielles

Équa. diff. linéaire d'ordre 1

$$(1+x^2)y' - 2xy = (1+x)^2$$

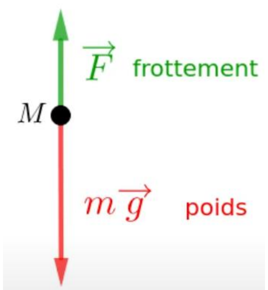
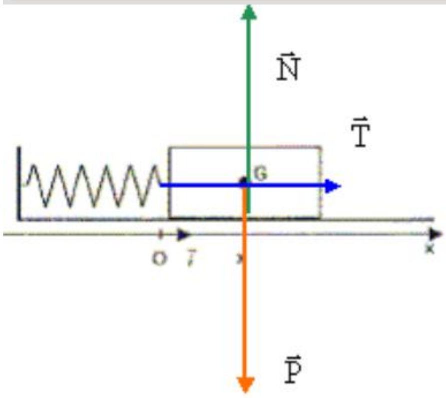
$$y' + a(x)\cdot y = f(x)$$

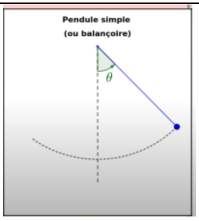
É.D. linéaire d'ordre 2 à coeff. constants

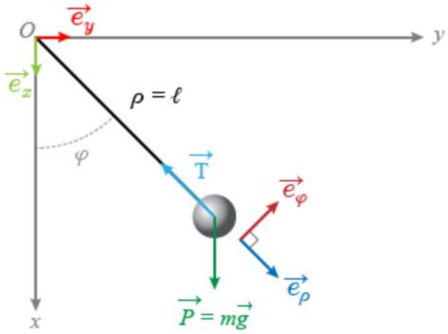
$$2y'' - 3y' + y = \cos(2x)$$

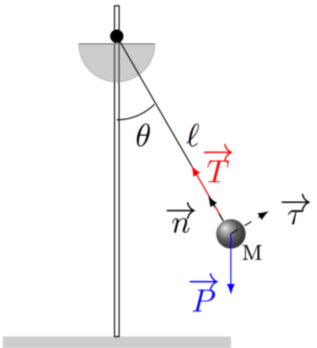
$$a\cdot y'' + b\cdot y' + c\cdot y = f(x)$$

Exemples :

Chute libre d'un corps freiné par un fluide		**Chute libre d'un corps dans un fluide** $mv' + kv^2 = mg$ variable t – fonction inconnue v – ordre 1 **Chute libre d'un corps dans l'air** $mv' + kv = mg$ variable t – fonction inconnue v – ordre 1	
oscillation d'une masse accrochée à un ressort		**Système masse-ressort** $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = f(t)$ variable t – fonction inconnue x – ordre 2 $\vec{T} = -kx\,\vec{i}$ $\vec{T} + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$ Projection su (O x) $-kx = mx''$; $x'' + \frac{k}{m}x = 0$	

<table>
<tr>
<td>Oscillation d’une masse accrochée à un pendule</td>
<td>




</td>
<td>Pendule simple (ou balançoire)
$\ell\,\ddot{\theta} + g\,\sin(\theta) = 0$
variable t – fonction inconnue θ – ordre 2
$m\ell^2\,\ddot{\varphi} = -m\,g\,\ell\,\sin\,(\varphi)$</td>
<td></td>
</tr>
</table>