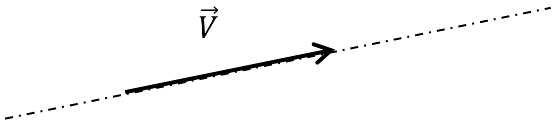
Fiche outils mathématiques : Les vecteurs

Définition

Un vecteur $\vec{V}$ est défini par :

- Un support (ou direction),
- Un sens,
- Une norme $\|\vec{V}\|$.



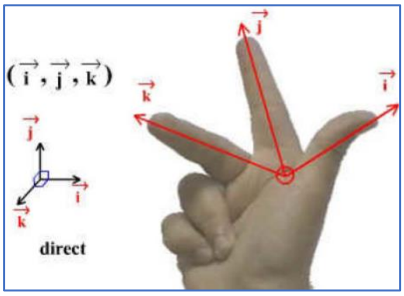
Coordonnées ou composantes dans un repère $\Re(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$:

Un repère de l'espace est la donnée d'un point origine O et d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

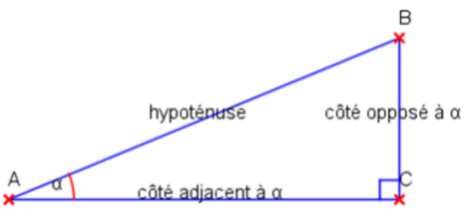
Base orthonormée directe :

Une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormée directe si :

- Les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ *et* $\vec{k}$ de la base sont orthogonaux,
- Les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ *et* $\vec{k}$ de la base sont unitaires,
- On passe d'un axe à l'autre par une rotation de +π/2 (sens trigonométrique).



Projection d'un vecteur dans un plan



Moyen mnémotechnique : SOH CAH TOA

$$\sin\alpha = \frac{Opposé}{Hypoténuse}$$

$$\cos\alpha = \frac{Adjacent}{Hypoténuse}$$

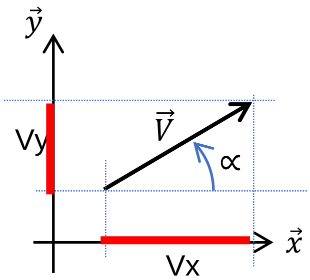
$$\tan\alpha = \frac{Opposé}{Adjacent}$$

Dans le plan $\vec{x}\vec{y}$, les relations entre la norme du vecteur, sa direction et ses composantes sont :

$Vx = \|\vec{\boldsymbol{V}}\|.\boldsymbol{cos} \propto$

$Vy = \|\vec{\boldsymbol{V}}\|.\mathbf{sin} \propto$ $\qquad \tan \propto = \frac{\boldsymbol{Vy}}{\boldsymbol{Vx}}$

$\|\vec{V}\| = \sqrt{\boldsymbol{Vx^2} + \boldsymbol{Vy^2}}$



Composantes d'un vecteur

Ecritures équivalentes : $\boxed{\vec{V} = \boldsymbol{X}\vec{x} + \boldsymbol{Y}\vec{y} + \boldsymbol{Z}\vec{z}}$ $\qquad \boxed{\vec{V}: \left| \begin{matrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} \end{matrix} \right.}$ $\qquad \boxed{\vec{V}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})}$

La norme $\|\vec{V}\|$ est égale à : $\|\vec{V}\| = \sqrt{\boldsymbol{X}^2 + \boldsymbol{Y}^2 + \boldsymbol{Z}^2}$.

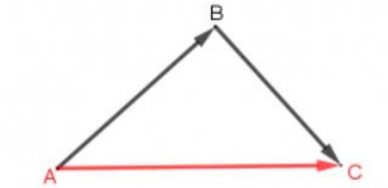
Soient A et B deux points tels que : $A \begin{vmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{vmatrix}$ et $B \begin{vmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{vmatrix}$, le vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x_B - x_A} \\ \boldsymbol{y_B - y_A} \\ \boldsymbol{z_B - z_A} \end{vmatrix}$

Pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$, un vecteur unitaire $\vec{u}$ de direction (AB) et de sens de A vers B : $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\|}$

Somme, soustraction, produit par un scalaire

SI $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ sont trois vecteurs et λ un scalaire alors :

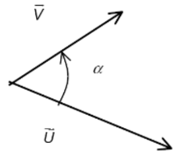
- $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}}$
- $\boldsymbol{\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}}$
- $\boldsymbol{\lambda\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \lambda.\overrightarrow{AB} + \lambda.\overrightarrow{BC}}$
- Relation de Chasles : $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$



Produit scalaire (dot product) de deux vecteurs :

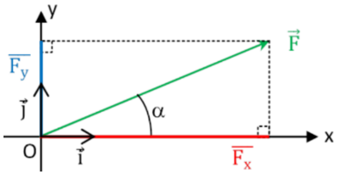
C'est un nombre réel : $\mathbf{\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \times \cos(\vec{U},\vec{V})}$.

$$Si\ \overrightarrow{V_1}\begin{vmatrix}X_1\\Y_1\\Z_1\end{vmatrix}\ et\ \overrightarrow{V_2}\begin{vmatrix}X_2\\Y_2\\Z_2\end{vmatrix}\ alors\ \overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = \boldsymbol{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}$$



Propriétés :

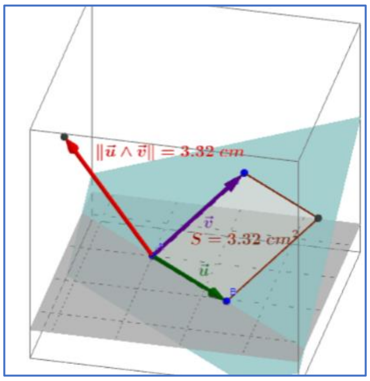
- $\vec{U}.\vec{V} = 0 \quad si \quad \vec{U} = 0 \quad ou \quad \vec{V} = 0 \quad ou \quad (\vec{U}.\vec{V}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- Dans une base orthonormée $\mathcal{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$: $\vec{x}.\vec{x} = \vec{y}.\vec{y} = \vec{z}.\vec{z} = 1$
  $\vec{x}.\vec{y} = \vec{y}.\vec{z} = \vec{z}.\vec{x} = 0$
- La composante de $\vec{F}$ sur l'axe x est le résultat du produit scalaire de $\vec{F}$ et du vecteur unitaire $\vec{\imath}$: $F_x = \vec{F} \cdot \vec{\imath}$



Produit vectoriel (cross product) de deux vecteurs :

Le produit vectoriel $\overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{W}$ est tel que :

- Le support de $\overrightarrow{W}$ est **perpendiculaire au plan** $(\boldsymbol{\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}})$.
- Le sens de $\overrightarrow{W}$ est tel que le trièdre $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{W})$ soit **direct**.
- La norme de $\overrightarrow{W}$ a pour valeur
  $\boldsymbol{\|\overrightarrow{W}\| = \|\overrightarrow{V_1}\| \times \|\overrightarrow{V_2}\| \times |\sin(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})|}$.



Expression analytique :

$$Si\ \overrightarrow{V_1}\begin{vmatrix}X_1\\Y_1\\Z_1\end{vmatrix}\ et\ \overrightarrow{V_2}\begin{vmatrix}X_2\\Y_2\\Z_2\end{vmatrix}\ alors\ \overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2}\begin{vmatrix}\boldsymbol{Y_1.Z_2 - Y_2.Z_1}\\\boldsymbol{Z_1.X_2 - Z_2.X_1}\\\boldsymbol{X_1.Y_2 - X_2.Y_1}\end{vmatrix}$$

Propriétés :

- Antisymétrie : $\vec{U}\wedge\vec{V} = -(\vec{V}\wedge\vec{U})$.
- Cas de nullité : $\vec{U}\wedge\vec{V} = 0\ si\ \vec{U} = 0\ ou\ \vec{V} = 0\ ou\ (\vec{U},\vec{V}) = 0 + k\pi$ (vecteurs colinéaires).
- Vecteurs d'une base orthonormée $\mathcal{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$: $\vec{x}\wedge\vec{x} = \vec{y}\wedge\vec{y} = \vec{z}\wedge\vec{z} = \vec{0}$

  $\vec{x}\wedge\vec{y} = \vec{z}\ ;\ \vec{y}\wedge\vec{z} = \vec{x}\ ;\ \vec{z}\wedge\vec{x} = \vec{y}$