Fiche 3 : Vitesse et accélération d'un point

Vitesse d'un point

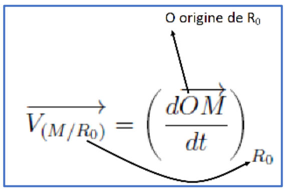
Vitesse moyenne :

$$v_{moy} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_B) - s(t_A)}{t_B - t_A}$$

Vitesse instantanée :

$$v = \lim_{t_B \to t_A} \frac{s(t_B) - s(t_A)}{t_B - t_A} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_A + \Delta t) - s(t_A)}{\Delta t} = \boxed{\frac{ds}{dt} = v}$$

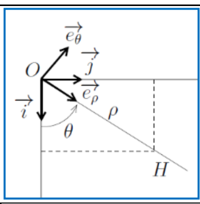
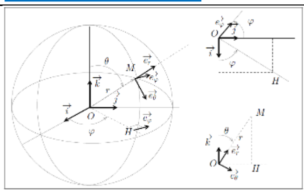
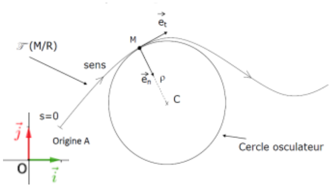
Repère de dérivation



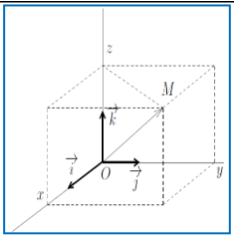
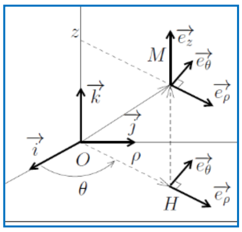
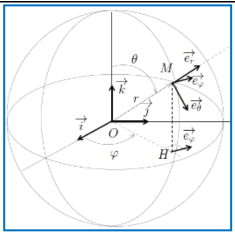
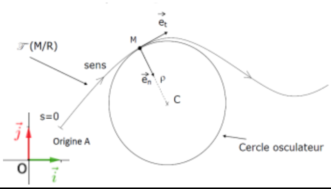
Lorsque l'on dérive une grandeur par rapport au temps, il faut identifier les paramètres qui sont variables (et donc dérivables) au cours du temps.

Dérivation des vecteurs unitaires de bases mobiles

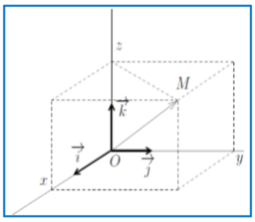
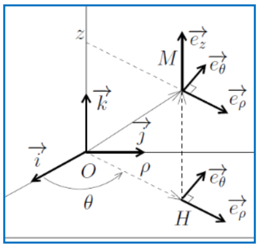
Les bases $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$, $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ et $(\overrightarrow{e_t}, \overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_b})$ dépendent du temps elles sont appelées **<u>bases mobiles</u>**.
Lorsque l'on dérive le vecteur position par rapport au temps, s'il est exprimé dans une base mobile, il faut penser à dériver les vecteurs unitaires.

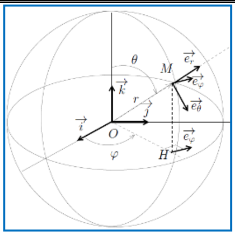
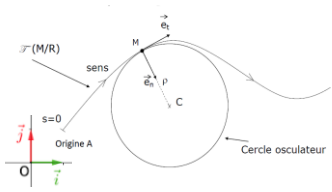
Base cylindrique		$\boxed{\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\theta} = \overrightarrow{e_\theta}}$ $\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right)_{R_0} = \frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot\theta\overrightarrow{e_\theta}}$ $\boxed{\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta} = -\overrightarrow{e_\rho}}$ $\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}\right)_{R_0} = \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot\theta\overrightarrow{e_\rho}}$
Base sphérique		$\left(\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right)_{R_0} = \frac{\partial\overrightarrow{e_r}}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\overrightarrow{e_r}}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \dot\varphi\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}$
Repère de Frenet		$\frac{d\overrightarrow{e_t}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_t}}{ds} \times \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho}\cdot\overrightarrow{e_n}$ $\boxed{v = \dot s = \frac{ds}{dt}}$

Vitesse = dérivée temporelle du vecteur position

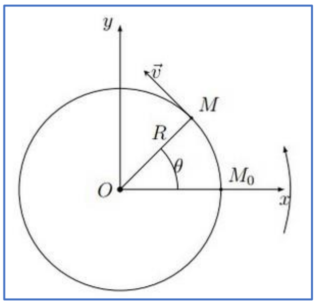
Coordonnées cartésiennes		$\overrightarrow{V_{(M/R_0)}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R_0} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$ $\boxed{\overrightarrow{V_{(M/R_0)}} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{e}_z}$ $\|\overrightarrow{V_{(M/R_0)}}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$
Coordonnées cylindriques		$\overrightarrow{OM}(t) = \rho(t)\vec{e_\rho} + z(t)\vec{e}_z$ $\overrightarrow{V_{(M/R_0)}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R_0} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e_\rho} + \rho\left(\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right)_{R_0} + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$ $\boxed{\overrightarrow{V_{(M/R_0)}} = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{z}\vec{e_z}}$
Coordonnées sphériques		$\overrightarrow{V_{(M/R_0)}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R_0} = \frac{dr}{dt}\vec{e_r} + r\left(\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right)_{R_0}$ $\left(\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right)_{R_0} = \dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\vec{e_\varphi}$ $\boxed{\overrightarrow{V_{(M/R_0)}} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e_\varphi}}$
Base de Frenet		$\overrightarrow{V_{(M/R_0)}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R_0} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}\frac{ds}{dt}$ $\boxed{\overrightarrow{V_{(M/R_0)}} = \dot{s}\vec{e_t} = v\vec{e_t}}$ $\|\overrightarrow{V_{(M/R_0)}}\| = \|\dot{s}\| = \|v\|$

Accélération = dérivée temporelle du vecteur vitesse

Coordonnées cartésiennes		$\overrightarrow{V_{(M/R_0)}} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{e}_z$ $\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{(M/R_0)}} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}}$ $\|\overrightarrow{\Gamma_{(M/R_0)}}\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$
Coordonnées cylindriques		$\overrightarrow{V_{(M/R_0)}} = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{z}\vec{e_z}$ $\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{(M/R_0)}} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{e_\rho} + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{e_\theta} + \ddot{z}\vec{e_z}}$

Coordonnées sphériques		$\overrightarrow{V_{(M/R_0)}} = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$ $\overrightarrow{\Gamma_{(M/R_0)}} = \left(\frac{d\overrightarrow{V_{(M/R_0)}}}{dt}\right)_{R_0} = \ddot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\rho}\left(\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right)_{R_0} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \rho\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \rho\dot{\theta}\left(\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}\right)_{R_0} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}$ $\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{(M/R_0)}} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_\rho} + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}}$
Base de Frenet		$\overrightarrow{V_{(M/R_0)}} = \dot{s}\overrightarrow{e_t}$ $\overrightarrow{\Gamma_{(M/R_0)}} = \ddot{s}\overrightarrow{e_t} + \dot{s}\left(\frac{d\overrightarrow{e_t}}{dt}\right)_{R_0} = \ddot{s}\overrightarrow{e_t} + \dot{s}\frac{d\overrightarrow{e_t}}{ds}\frac{ds}{dt}$ $\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{(M/R_0)}} = \ddot{s}\overrightarrow{e_t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho_c}\overrightarrow{e_n}}$

Solide en rotation autour d’un axe



Abscisse angulaire

Périmètre d’un cercle : $s = 2\pi \cdot R$

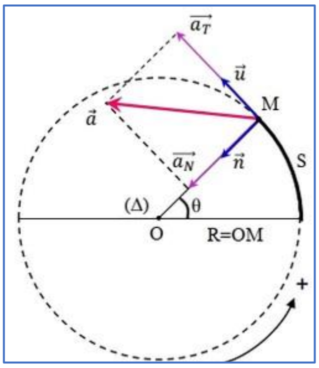
Longueur d’arc : $s = \theta \cdot R$ avec s en mètres et θ en rad

Vitesse angulaire (rad/s)

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

Vitesse linéaire(m/s)

$$v = \dot{s} = \quad \boxed{\dot{\theta} = \frac{v}{R}}$$



Accélération angulaire (rad.s^{-2})

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}$$

Accélération linéaire (m.s^{-2})

$$\vec{a} = a_t \cdot \vec{u} + a_n \cdot \vec{n}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u} + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n}$$