Fiche 2 : Mouvements et trajectoires

Equations horaires du mouvement

La position d'un point matériel M est cours du temps est définie par la fonction vectorielle de la variable t : $t \to \overrightarrow{OM(t)}$

Dans un repère cartésien :	$\begin{cases} t \mapsto x(t) \\ t \mapsto y(t) \\ t \mapsto z(t) \end{cases}$ $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$
Dans un repère cylindrique :	$\begin{cases} t \mapsto \rho(t) \\ t \mapsto \theta(t) \\ t \mapsto z(t) \end{cases}$ $\overrightarrow{OM}(t) = \rho(t)\,\vec{e}_\rho(t)$
Dans un repère sphérique	$\begin{cases} t \mapsto r(t) \\ t \mapsto \theta(t) \\ t \mapsto \varphi(t) \end{cases}$ $\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\,\vec{e}_r(t)$

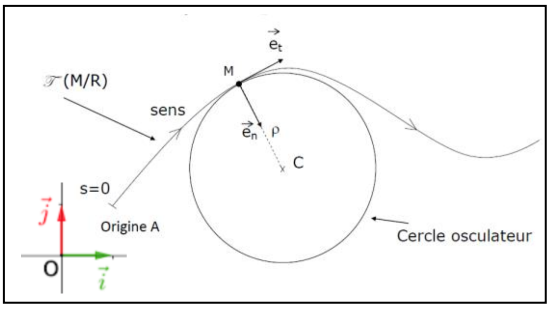
Les bases $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$, $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ et $(\overrightarrow{e_t}, \overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_b})$ dépendent du temps elles sont appelées **bases mobiles**.

Equations paramétriques du mouvement

Position du point M en fonction de l'abscisse curviligne, exprimée dans la base de Frenet :

$s \to \overrightarrow{OM}(s)$

Base de Frenet $(\overrightarrow{e_t}, \overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_b})$ = base orthonormée directe



Vitesse : $v = \dot{s} = \frac{ds}{dt}$

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire : $\vec{v} = v \cdot \overrightarrow{e_t}$

Vecteur unitaire tangent à la trajectoire :

$$\overrightarrow{e_t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{OM}/_{dt}}{\left\|d\overrightarrow{OM}/_{dt}\right\|} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Vecteur unitaire normal à la trajectoire :

$$\overrightarrow{e_n} = \rho \cdot \frac{d\overrightarrow{e_t}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{e_t}/_{dt}}{\left\|d\overrightarrow{e_t}/_{dt}\right\|}$$

Dérivée temporelle du vecteur unitaire tangent :

$$\frac{d\overrightarrow{e_t}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_t}}{ds} \times \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho} \cdot \overrightarrow{e_n}$$

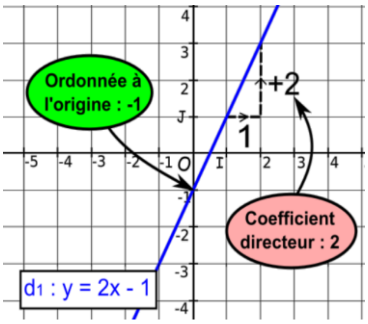
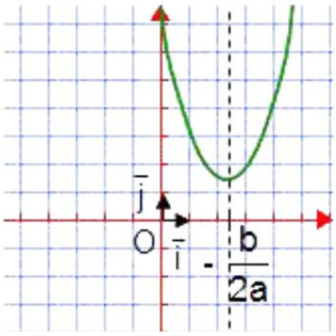
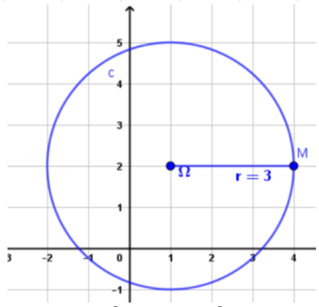
Trajectoires

La trajectoire T(M/R_O) d'un point M par rapport à un repère R_O est la courbe continue formée par l'ensemble des positions successives de M au cours du mouvement.

Equation d'une trajectoire

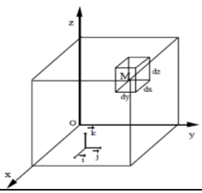
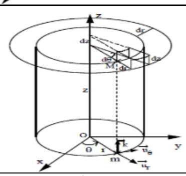
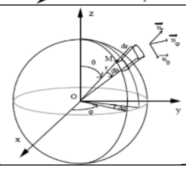
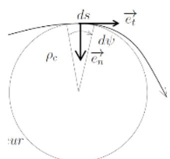
L'équation cartésienne d'une trajectoire plane est donnée par une expression de la forme $f(x, y) = 0$, son équation polaire par une expression de la forme $g(\rho, \theta) = 0$.

Types d'équations caractéristiques

Droite	Parabole	Cercle
y=ax + b	**y=a.x^2 + b.x + c**	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
		
	Axe de symétrie : -b/2a	$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$

Déplacements élémentaires : différentielles des vecteurs position

Le vecteur déplacement élémentaire d'un point M, à un instant t est la différentielle $d\overrightarrow{OM}(t)$ (unité : mètre)

En coordonnées cartésiennes	$\boxed{d\overrightarrow{OM}(t) = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}}$ $\boxed{dOM^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2}$	
En coordonnées cylindriques	$\boxed{d\overrightarrow{OM}(t) = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z}$ $\boxed{dOM^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2}$	
En coordonnées sphériques	$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr \cdot \vec{e}_r + r \cdot \partial\theta \cdot \vec{e}_\theta + r \cdot sin\theta \cdot \partial\varphi \cdot \vec{e}_\varphi}$	
En abscisse curviligne	$\boxed{ds = \rho_c d\psi}$ $\boxed{d\overrightarrow{OM}(s) = ds\,\vec{e}_t}$ $\boxed{dOM^2 = ds^2}$	

Formule permettant de lier les déplacements élémentaires :

$$\boxed{ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2}$$