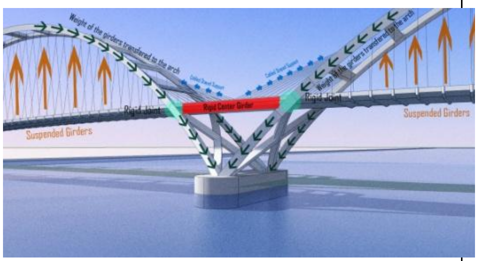
Forces et moments

1. Introduction :

On appelle action mécanique toute cause physique capable :

de maintenir un solide en équilibre	de déplacer un solide ou de modifier son mouvement,	de déformer un solide
		

Les actions mécaniques qui s'exercent sur les solides peuvent être réparties en deux grandes catégories :

- Les actions mécaniques __________________ (champ de pesanteur, champ électromagnétique, ….)
- Les actions mécaniques ____________________ exercées par un solide, ou un fluide, sur un autre par l'intermédiaire de leur surface de contact.

2. Modélisation des actions mécaniques

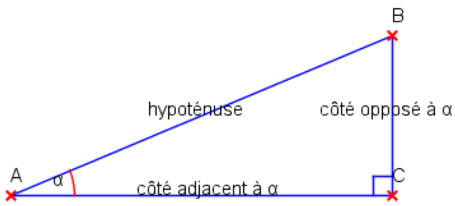
Les actions mécaniques peuvent être :

- des forces (effort) : pousser ou tirer selon un axe, unité Newton (N)
- des moments (couples) : tourner/tordre autour d'un axe, unité Newton.mètre (Nm)

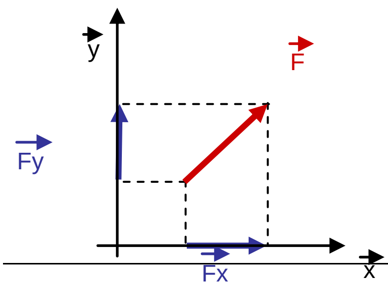
Les forces et les moments sont modélisable par des vecteurs, ils ont donc :

- un point d'application,
- un support, droite Δ
- un sens
- une norme (en N pour les forces et en Nm pour les moments)

Rappel :

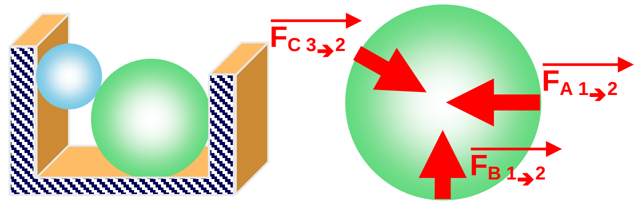
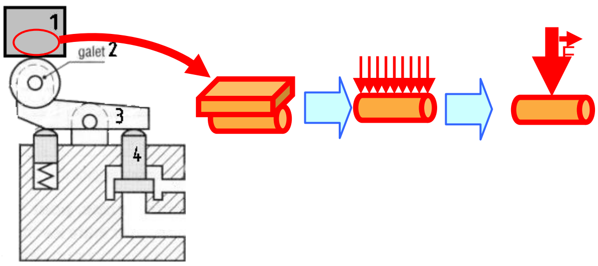
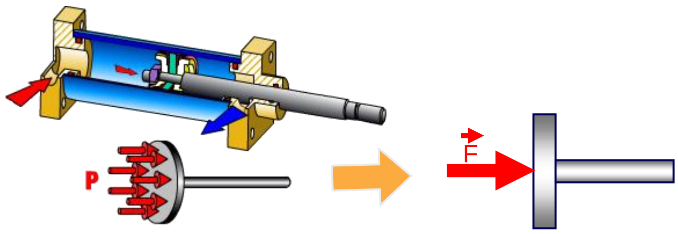
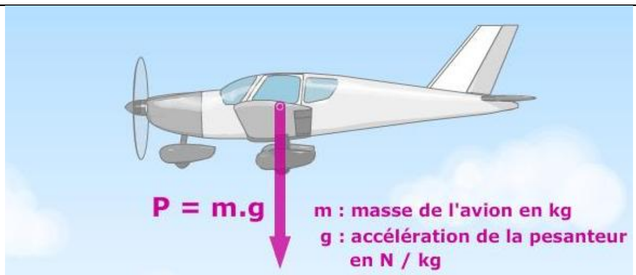


Les composantes d'une force, dans un repère :



3. Forces et résultantes de forces

Notation : $\overrightarrow{F_A(1 \to 2)}$ ou $\overrightarrow{A_{(1\to2)}}$

Une force peut être ponctuelle Elle est dirigée vers la matière. S'il n'y a **pas de frottement**, la force est perpendiculaire (normale) au plan du contact.	
Un effort peut être réparti régulièrement le long d'une ligne. La résultante des forces s'appliquera alors au centre géométrique du contact, sa norme sera: Force= charge linéique x longueur du contact	
Une force peut être répartie de façon homogène sur une surface Elle peut alors être modélisée par une résultante au centre géométrique de la surface. Force = Pression x surface Attention aux unités: 1 bar = 10^5Pa	
Les forces peuvent s'appliquer sur un volume (cas des actions à distance) : • action électrostatique • action magnétique • action gravitationnelle (poids) **Action de la pesanteur (poids)** Action de la pesanteur : elle s'exerce en tout point du solide. elle est modélisable par une force au centre de gravité du solide. Cette force est verticale et dirigée vers le bas.	 à la surface de la terre, g = 9.81m/s^2 ou N/kg

100N
Le pied sur la pédale du vélo

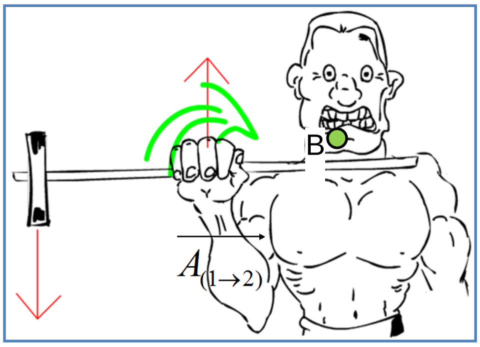
100 000N
Un réacteur d'avion sur les gaz

1N
Le doigt sur le poussoir d'un stylo

1 000N
La raquette de tennis sur la balle

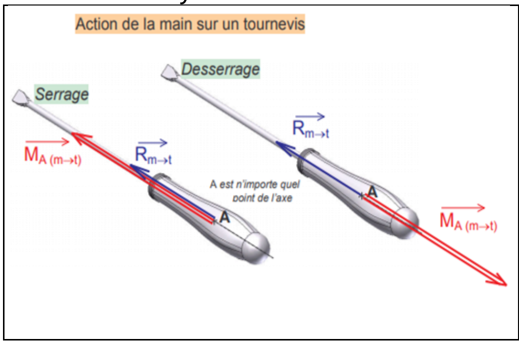
10 000 000N
Un moteur de fusée sur les gaz

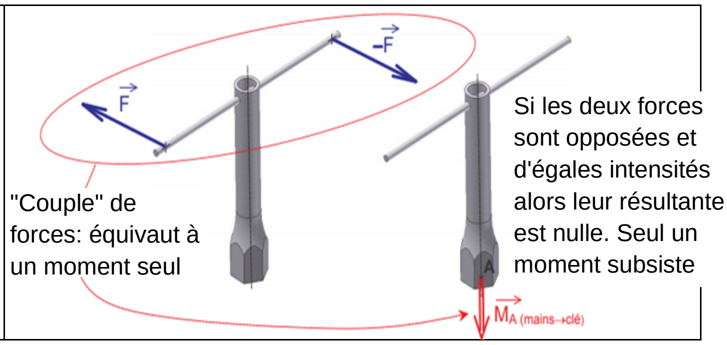
4. Moments et couples



Moment:
Un moment est un effort de rotation autour d'un point, provoqué par une force située à une certaine distance du point. Il est noté $M_B(\overrightarrow{A_{1\to2}})$

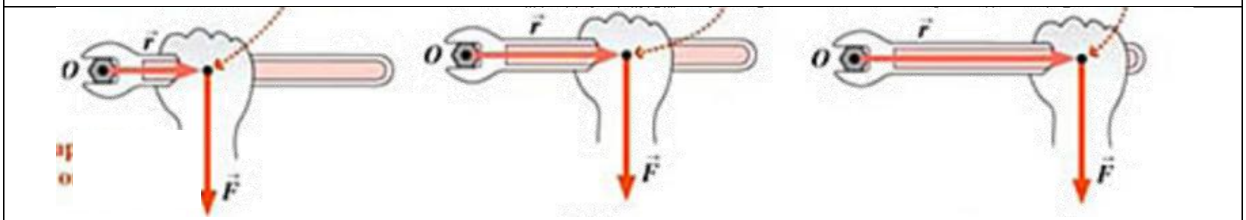
Couple:
On appelle couple un ensemble de forces appliquées à un solide dont la résultante est nulle mais dont le moment total est non nul. En pratique, un couple tend seulement à mettre en rotation le système.





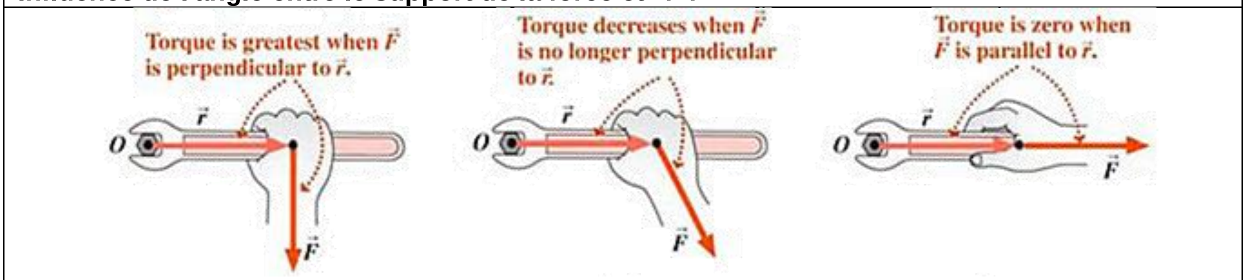
Calcul d'un moment:

Influence de la distance "r":



Conclusion:

Influence de l'angle entre le support de la force et "r":



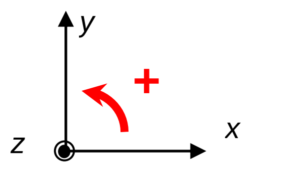
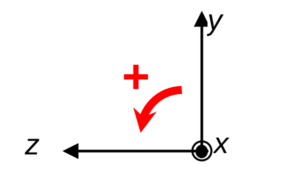
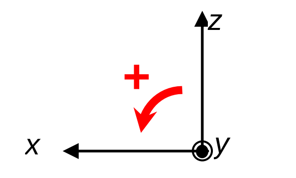
Conclusion:

Le moment d'une force par rapport à un point est égal au produit de l'intensité de la force et de la distance *d* entre le support de la force et le point considéré (*d* = bras de levier ; ***d* est perpendiculaire au support de la force** et passe par le point considéré).

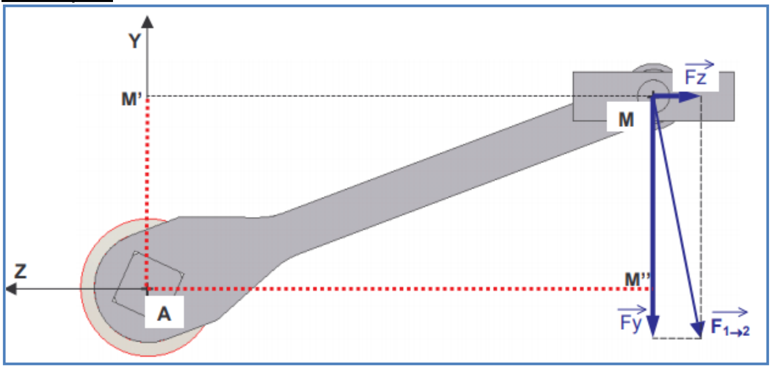
Moment (N · m) **= Force** (N) **× Bras de levier** (m)

Forces et moments

Le signe du moment algébrique dépend du sens de rotation de la pièce, provoqué par la force, autour du point considéré. Le sens trigonométrique est généralement choisi comme sens positif.

Dans le plan (*x*, *y*)	Dans le plan (*y*, *z*)	Dans le plan (*x*, *z*)
		

Exemple:



a) On analyse le schéma: la force provoque un moment autour de l'axe x

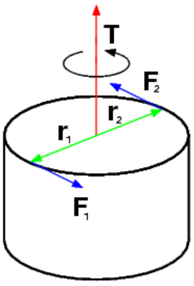
b) On projette la force dans le repère: $\overrightarrow{F_{1\to2}} = \overrightarrow{Fy} + \overrightarrow{Fz}$

c) On applique la formule du moment:

$$\overrightarrow{M_A(\overrightarrow{F_{1\to2}})} = \overrightarrow{M_A(\overrightarrow{Fy})} + \overrightarrow{M_A(\overrightarrow{Fz})}$$

$$= (-Fy \times AM'' - Fz \times AM')\,\vec{x}$$

Calcul d'un couple

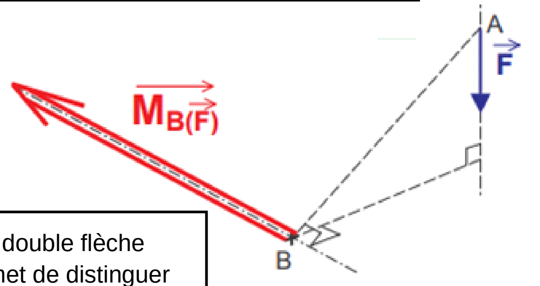


Le couple (exemple : couple-moteur) est causé par un ensemble de forces dont la somme vectorielles est nulle. Il s'exprime en Newtons mètre (N.m)

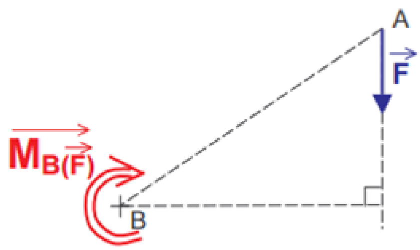
Pour l'exemple ci-contre :

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}$$
$$T = F_1 \times r_1 + F_2 \times r_2$$

Représentations habituelles d'un moment



Une double flèche permet de distinguer un vecteur moment d'un vecteur force



5. Modélisation sous forme de torseur

Les actions mécaniques sont modélisables sous forme de torseur :

$$\{\tau_{1\to2}\}_A = {}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{1\to2}}\\ \overrightarrow{M_{A\,1\to2}}\end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}X_{1\to2} & L_{A\,1\to2}\\ Y_{1\to2} & M_{A\,1\to2}\\ Z_{1\to2} & N_{A\,1\to2}\end{matrix}\right\}_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})}$$

éléments de réduction au point A :
résultante
moment en A

leurs composantes, dans ce repère

(inutile de préciser le repère s'il n'y a pas de confusion possible)

Torseurs particuliers

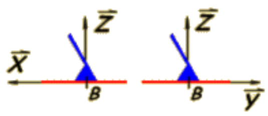
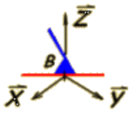
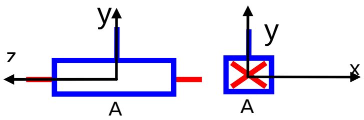
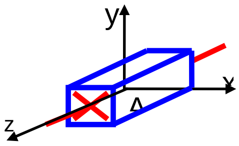
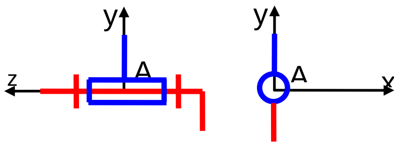
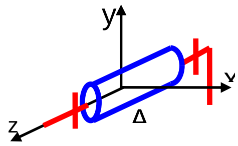
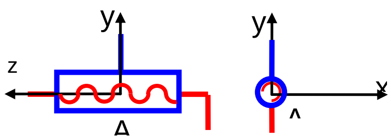
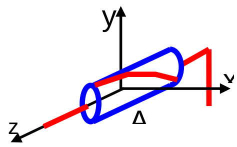
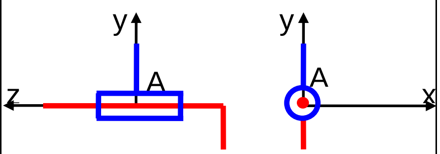
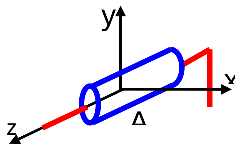
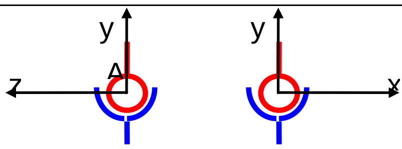
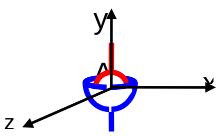
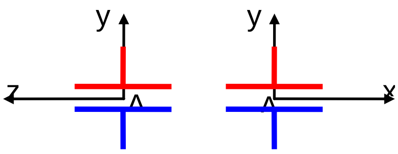
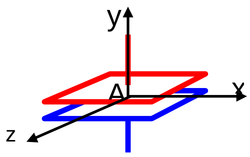
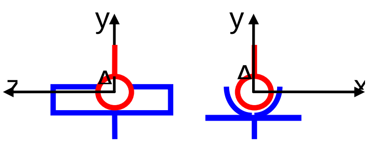
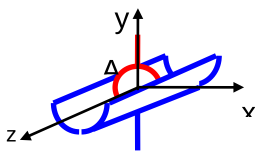
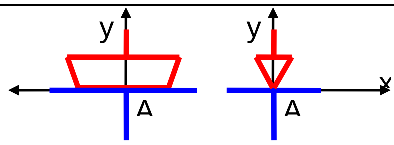
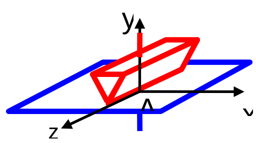
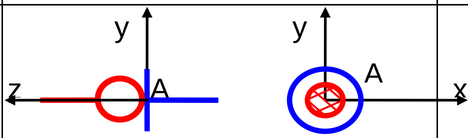
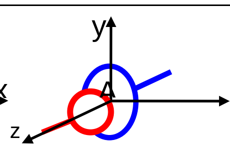
Torseur glisseur	Torseur couple
On appelle torseur glisseur, tout torseur associé à une action mécanique dont le moment est nul en un point. ${}_A\{T_{(ext\to1)}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{(ext\to1)}} \neq \vec{0}\\ \overrightarrow{M_{A(ext\to1)}} = \vec{0}\end{matrix}\right\}_R$ <u>Remarque:</u> les éléments de réduction d'un torseur glisseur sont les mêmes en tout point appartenant au support de la résultante	On appelle torseur couple, tout torseur associé à une action mécanique dont la résultante est nulle. ${}_A\{T_{(ext\to1)}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{(ext\to1)}} = \vec{0}\\ \overrightarrow{M_{A(ext\to1)}} \neq \vec{0}\end{matrix}\right\}_R$ <u>Remarque:</u> les éléments de réduction d'un torseur couple sont les mêmes en tout point.

6. Efforts transmissibles dans les liaisons parfaites

<u>Hypothèses :</u>

- liaisons géométriquement parfaites,
- pas de jeu fonctionnel,
- pas de frottement,
- pas de déformation

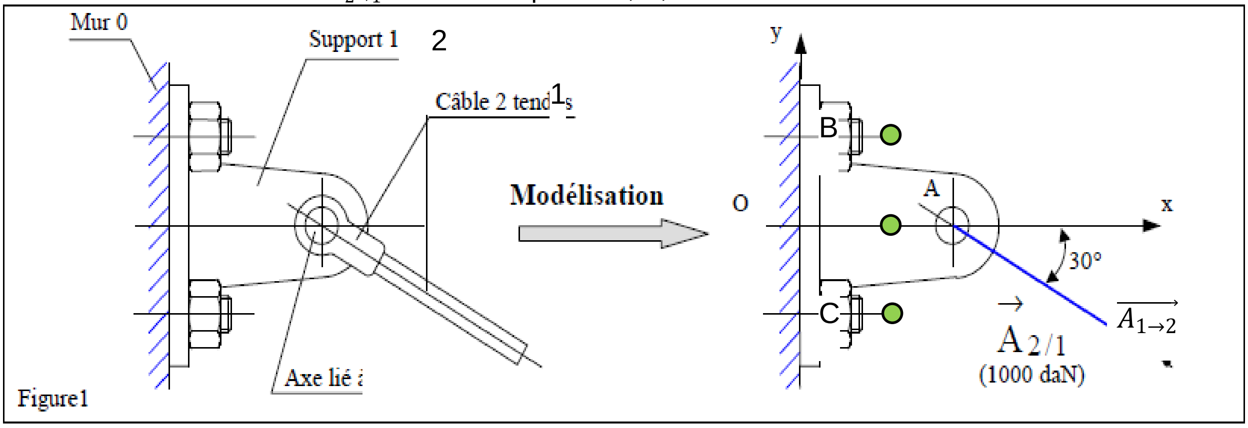
Forces et moments

Nombre de mobilités	Mouvements relatifs possibles	Torseur des efforts transmissibles au centre de la liaison	Schématisation Plane	Schématisation spatiale
0				
1				
				
				
2				
3				
				
4				
				
5				

7. Caractérisation d'une action mécanique en un point choisi

Incidence du point de réduction de l'action mécanique sur ses composantes:

Observons l'effet le la force $\overrightarrow{A_{2\to1}}$ autour des points A, B, C et O.



Conclusion: la résultante ne change pas mais le moment change car la distance change

Pour calculer les composantes du moment au point choisi (par exemple B), il existe deux méthodes:

- l'utilisation du bras de levier: en projection sur l'axe qui porte les moments,
  Moment en B = Moment en A (si non nul) + Force ×Bras de levier
- l'utilisation du produit vectoriel:

$$\overrightarrow{M_{B(1\to2)}} = \overrightarrow{M_{A(1\to2)}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{A_{1\to2}}$$

Méthode pour exprimer le torseur en un autre point :

La résultante du torseur reste inchangée.

Il faut calculer les valeurs du moment au nouveau point.

Le calcul se présentera donc de la façon suivante :

CONNU

$$\{\tau_{1\to2}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{1\to2}}\\ \overrightarrow{M_{A\,1\to2}}\end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}X_{1\to2} & L_{A\,1\to2}\\ Y_{1\to2} & M_{A\,1\to2}\\ Z_{1\to2} & N_{A\,1\to2}\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow {}_B\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{1\to2}}\\ \overrightarrow{M_{B\,1\to2}} = ?\end{matrix}\right\}$$

?

on calcule le moment en B : $\overrightarrow{M_{B\,1\to2}} = \overrightarrow{M_{A\,1\to2}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_{1\to2}}$ *d'après la définition mathématique d'un torseur*

$$= \begin{vmatrix}L_{A1\to2}\\ M_{A1\to2}\\ N_{A1\to2}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a\\ b\\ c\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}X_{1\to2}\\ Y_{1\to2}\\ Z_{1\to2}\end{vmatrix}$$

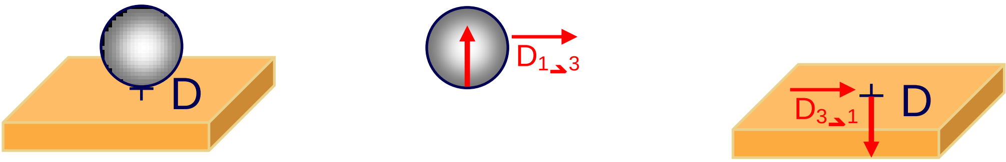
le produit vectoriel est évidemment prioritaire devant l'addition

ce qui donne après calcul : $$\{\tau_{1\to2}\} = {}_B\left\{\begin{matrix}X_{1\to2} & L_{A\,1\to2} + b.\,Z_{1\to2} - c.\,Y_{1\to2}\\ Y_{1\to2} & M_{A\,1\to2} + c.\,X_{1\to2} - a.\,Z_{1\to2}\\ Z_{1\to2} & N_{A\,1\to2} + a.\,Y_{1\to2} - b.\,X_{1\to2}\end{matrix}\right\}$$

la même résultante qu'en A ***le nouveau moment, calculé en B***

8. Principe des actions mutuelles (3ème Loi de Newton)

Les actions mécaniques dans une liaison peuvent s'exprimer de deux façons suivant que l'on isole l'un ou l'autre des deux solides.



Ces deux actions mécaniques représentent la même chose. La différence réside dans le sens des vecteurs. Ils sont opposés.

$$\{\tau_{1\to2}\}_A = -\{\tau_{2\to1}\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R}_{1\to2} = -\overrightarrow{R}_{2\to1} \\ \overrightarrow{M}_{A\,1\to2} = -\overrightarrow{M}_{A\,2\to1} \end{Bmatrix}$$

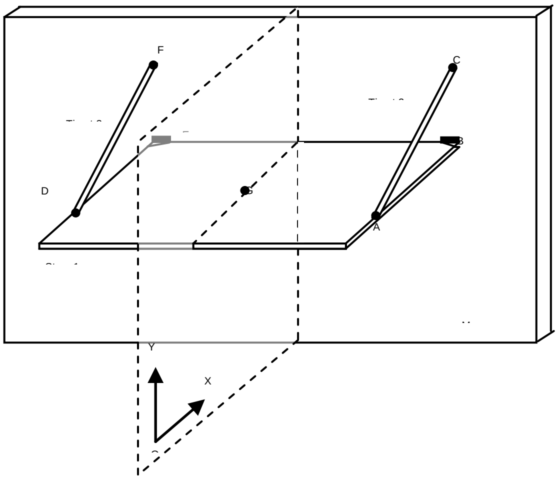
Si le torseur modélisant l'action de (1) sur (2), en A, est :

alors le torseur de l'action de (2) sur (1) en A est :

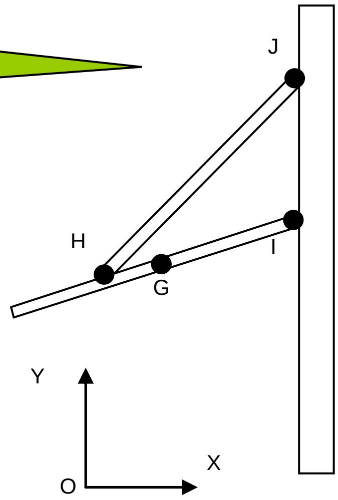
9. Modélisation plane des actions mécaniques

Un problème est considéré comme plan si:

- le système étudié est géométriquement symétrique par rapport au plan d'étude,
- les forces sont contenues dans le plan (ou symétriques par rapport au plan) et les moments sont orthogonaux au plan d'étude



Modélisation du store dans le plan (G, x, y)



Le torseur des actions mécaniques se modifie alors de la façon suivante:

Forme générale :

$${}_A\{\tau_{2\to1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{21} & L \\ Y_{21} & M \\ Z_{21} & N \end{Bmatrix}_R$$

(6 inconnues)

Simplification :

$${}_A\begin{Bmatrix} X_{21} & \cancel{L_A} \\ Y_{21} & \cancel{M_A} \\ \cancel{Z_{21}} & N_A \end{Bmatrix}_R$$

Forme simplifiée :

$${}_A\begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & N_A \end{Bmatrix}_R$$

(3 inconnues)